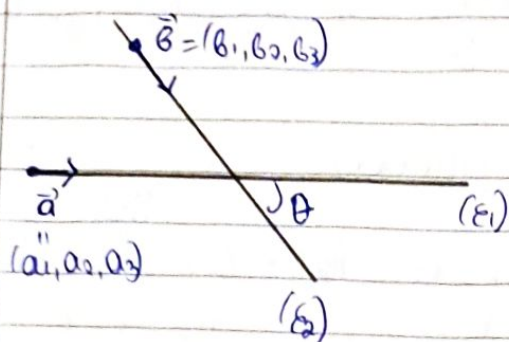


25/04/2017

Γωνία Ευθείων = η μικρότερη γωνία που σχηματίζουν
 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$

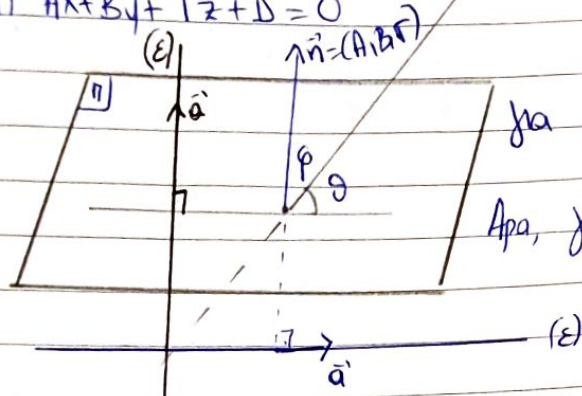


= η γωνία των παραλλήλων διανυσμάτων τους

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{a}', \vec{b}' \rangle}{\|\vec{a}'\| \|\vec{b}'\|}$$

Γωνία ωθείας επιπέδου (θ):

$$(\pi) \quad Ax + By + Cz + D = 0$$



$$(E) : \vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda \vec{a}' \left(\begin{matrix} x-x_1 \\ y-y_1 \\ z-z_1 \end{matrix} \right) = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3}$$

για $\hat{\phi}$ θυμίζω ότι $\cos \phi = \frac{\langle \vec{n}', \vec{a}' \rangle}{\|\vec{n}'\| \|\vec{a}'\|}$

Αρα, για τη $\hat{\theta} = \frac{\pi}{2} - \hat{\phi}$

Παρατήρηση: 1) η (E) είναι παράλληλη στο (π) αν:

το $\vec{n}' \perp (\pi)$ είναι καθετό και στην (E)

το $\vec{n}'$ είναι καθετό στο $\vec{a}' \in (E) \Rightarrow \langle \vec{n}', \vec{a}' \rangle = 0$

$$\Rightarrow Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0$$

2) η (E) είναι καθετή στο (π):

$$\Rightarrow \vec{0} \parallel \vec{n}' \Rightarrow \vec{n}' = \lambda \vec{a}', \lambda \in \mathbb{R}^* \Rightarrow (A, B, C) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A}{a_1} = \frac{B}{a_2} = \frac{C}{a_3} !$$

! Δεν έπρεπε καμία βλαβή σου έιναι από τα a_1, a_2, a_3 είναι μηδέν. Αν κάποιο από αυτά είναι μηδέν τότε και ο αριθμητής είναι μηδέν.

Παράδειγμα

$$(\pi) : 2x - 3y - 4z - 12 = 0$$

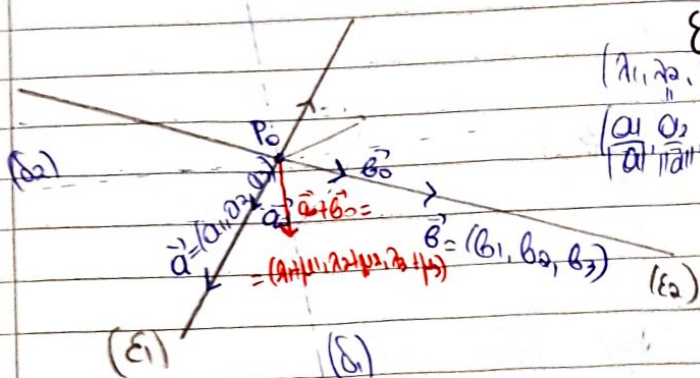
$$(\epsilon) : \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{+2} = \frac{z-10}{-2}$$

Παρατηρούμε ότι $(\epsilon) \parallel \pi$

αφού $2(-1) + (-3) \cdot 2 + (-4)(-2) = 0$

Διχοτόμος δύο ευθειών

Εύρεση εξισώσεων των δ_1, δ_2



$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

$$\left(\frac{a_1}{\|a\|}, \frac{a_2}{\|a\|}, \frac{a_3}{\|a\|} \right)$$

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

$$\vec{b}_0 = \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$$

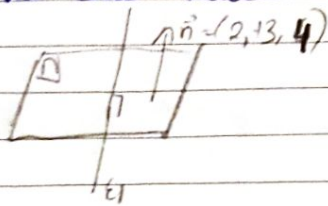
$$(\epsilon_1) : \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$$

$$(\epsilon_2) : \frac{x-x_0}{b_1} = \frac{y-y_0}{b_2} = \frac{z-z_0}{b_3}$$

Αρα: $(\delta_1) : \frac{x-x_0}{\lambda_1+\mu_1} = \frac{y-y_0}{\lambda_2+\mu_2} = \frac{z-z_0}{\lambda_3+\mu_3}$

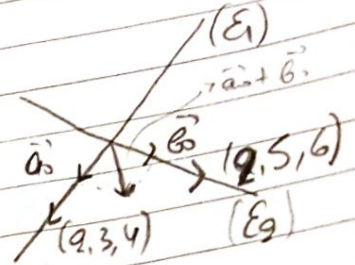
$$(\delta_2) : \frac{x-x_0}{-\lambda_1+\mu_1} = \frac{y-y_0}{-\lambda_2+\mu_2} = \frac{z-z_0}{-\lambda_3+\mu_3}$$

Παράδειγμα: Δίνονται οι $(\epsilon_1), (\epsilon_2)$ οι οποίες διέρχονται από το $P(1, -4, 3)$ και είναι (αποκλίσεις προς τα $\vec{a} = (2, 3, 4)$, $\vec{b} = (2, 5, 6)$ αντίστοιχα.)
(και είναι κάθετες στα $(\Pi) : 2x + 3y + 4z + 10 = 0 \dots$)



$$(\epsilon_1) : \frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-3}{4}$$

$$(\epsilon_2) : \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-3}{6}$$

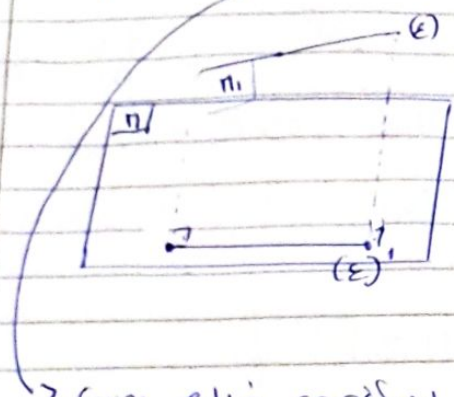


$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{(2, 3, 4)}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{3}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}} \right)$$

$$\vec{b}_0 = \left(\frac{2}{\sqrt{64}}, \frac{5}{\sqrt{64}}, \frac{6}{\sqrt{64}} \right)$$

$$\delta_1, \delta_2 : \frac{x-1}{a_1 \pm \mu_1} = \frac{y-4}{a_2 \pm \mu_2} = \frac{z-3}{a_3 \pm \mu_3}$$

• Πρόβληση Ευθείας Σε Εμπέδο •



$$(E) \quad \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3} \quad \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \parallel (E)$$

$$(\Pi) : Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$$

η πρόβληση $(E)'$ είναι τομή δύο επιπέδων
και συζητούμεν εδώ είναι η τομή
των $(\Pi), (\Pi_1)$ λέγεται ο προβολισμός της n .
L. γινόμεν

> Είναι τομή επιπέδων

$$\begin{cases} Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0 & Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0 \end{cases} \quad (x_0, y_0, z_0)$$

Για τον προβολισμό του (Π) αναπτύσσεται ένα επίπεδο του και δύο διανύσματα παράλληλα σε $(\vec{a}, \vec{b})$ αυτού.

Επίπεδο $\rightarrow$	$x-x_0$	$y-y_0$	$z-z_0$	
$\vec{a} \rightarrow$	a_1	a_2	a_3	$= 0$
$\vec{b} \rightarrow$	b_1	b_2	b_3	

Άρκει για επίπεδο αυτό να πάρουμε το επίπεδο της ευθείας (E)
 $P_1(x_1, y_1, z_1)$

Λέμε δύο διανύσματα $\parallel (\Pi_1)$

$\rightarrow$ ένα είναι το διάνυσμα της ευθείας

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

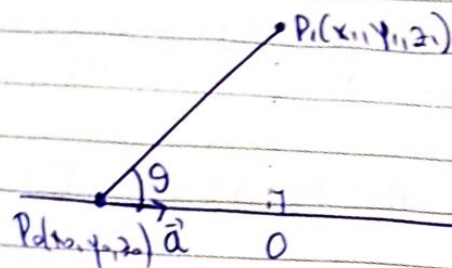
$$(\Pi_1) : \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ A & B & \Gamma \end{vmatrix} = 0$$

$\rightarrow$ το (Π_1) ως "προβλήση" είναι
κάθετο στο (Π) γιατί

Άρα, είναι $\parallel$ στο $\vec{n} = (A, B, \Gamma) \perp (\Pi)$

Συνεπώς, η πρόβληση $(E) : \{(\Pi_1), (\Pi)\}$

* Απόσταση Σημείου Από Εξέτα



$$(ε_1): \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$$

$$|\vec{P_1O}| = d(P_1, (ε_1)) =;$$

$$\sin \theta = \frac{|\vec{P_1O}|}{|\vec{P_0P_1}|} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{matrix} d \\ || \\ |\vec{P_1O}| = \sin \theta \cdot |\vec{P_0P_1}| \end{matrix}} \quad (1)$$

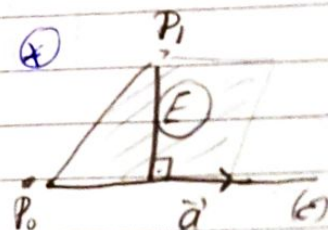
Γνωρίζουμε ότι το $|\vec{P_0P_1} \times \vec{P_0O}| = |\vec{P_0P_1}| |\vec{P_0O}| \sin \theta$ *

$$\Rightarrow \boxed{\sin \theta = \frac{|\vec{P_0P_1} \times \vec{P_0O}|}{|\vec{P_0P_1}| |\vec{P_0O}|}} \quad (2)$$

$$(1) \underline{(2)} \Rightarrow d = |\vec{P_1O}| = \frac{|\vec{P_0P_1} \times \vec{P_0O}|}{|\vec{P_0O}|} \Rightarrow$$

αλλά "με ενοστέι το $\vec{P_0O}$ κοιτάμε πως εμφανίστηκε και παρατηρούμε ότι το ίδιο αποτέλεσμα έχουμε αν βρούμε * την θέση του $\vec{P_0O}$ θέσουμε το $\vec{a}$ (όχι ως προς πρόσημο)

$$\Rightarrow \boxed{|\vec{P_1O}| = \frac{|\vec{P_0P_1} \times \vec{a}|}{\|\vec{a}\|}} = d(P_1, (ε)) = \frac{|\vec{P_0P_1} \times \vec{a}|}{\|\vec{a}\|} \quad (*)$$



Το (*) δίνει το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{P_0P_1}, \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$

Αλλά εμβαδό παραλληλογράμμου = βάση · ύψος = $\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ (υψος υψών $\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ για ομοιότητες B)

Άρα, ο τύπος της απόστασης είναι ανεξάρτητος του επιλογής του P_0